На правах рукописи

Жукова Ольга Геннадьевна

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2009

Работа выполнена на кафедре основ теории механики и автоматического управления ГОУ ВПО «Омский государственный технический университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Романовский Рэм Константинович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Блохин Александр Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор Чугунов Владимир Аркадьевич

Ведущая организация: Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Защита состоится 26 марта 2009 года в 16 ^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете им. В.И. Ульянова-Ленина по адресу: 420008, г.Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина.

Автореферат разослан «____» февраля 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент Е.К. Липачёв

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Одна из задач, возникающих в теории колебаний, теории автоматического управления, – разработка методов граничного управления процессами в сплошных средах, описываемыми краевыми задачами для уравнений с частными производными гиперболического типа. Первые результаты в этом круге проблем были получены в 60-е, 70-е годы минувшего столетия. Серьезное продвижение в связи с потребностями практики произошло в 80-е и 90-е годы в работах А.Г. Бутковского, Ж.-Л. Лионса, О.Ю. Эмануилова, В. Коморника, Ф.П. Васильева, М.М. Потапова и других авторов. В последнее десятилетие вышел большой цикл работ В.А. Ильина и Е.И. Моисеева, посвященный проблеме граничного управления волновыми процессами.

Наряду с работами по этой проблематике большое число исследований посвящено проблеме управления процессами теплопереноса и диффузии, моделируемыми краевыми задачами для уравнений параболического типа: работы А.Г. Бутковского, Ж.-Л. Лионса, А.И. Егорова, Ф.П. Васильева и других авторов. В последние десятилетия интенсивно развивается гиперболическая теория теплопроводности, устраняющая имеющий место в параболической теории парадокс бесконечной скорости распространения тепла. Представляет теоретический и практический интерес разработка подходов к решению задач управления процессом теплопереноса в рамках гиперболической модели с использованием методов теории гиперболических уравнений.

В цикле работ Р.К. Романовского, Е.В. Воробьевой, Е.Н. Стратилатовой построен математический аппарат, позволяющий с единой точки зрения исследовать краевые задачи для некоторых классов гиперболических систем.

Цель работы – разработка на основе указанного математического аппарата подхода к решению задачи граничного управления процессом теплопереноса в однородном материале в рамках гиперболической модели теплопроводности и построение классов решений этой задачи в случаях одномерных, двумерных и трехмерных сред.

В работе используется аппарат функционального анализа, теории гиперболических уравнений, гиперболической теории теплопроводности.

Научная новизна. В диссертации впервые получены следующие результаты.

1. Вычислены матрицы Римана первого и второго рода гиперболической системы уравнений теплопроводности.

2. Построено явное представление решений задачи Коши для двумерной и трехмерной гиперболической системы уравнений теплопроводности в виде суперпозиции плоских волн.

3. Разработан подход к решению задачи граничного управления процессом теплопереноса в однородном теле, состоящий в сведении к задаче *начального* управления процессом теплопереноса в фиктивном теле, содержащем данное, и последующем использовании развитого в пунктах 1, 2 аппарата.

4. Построены классы решений, зависящие от функциональных параметров, задачи граничного управления процессом теплопереноса:

– в полубесконечном стержне;

– в стержне конечной длины (одностороннее и двустороннее управление);

– в пластинке звездной формы;

– в пространственном теле звездной формы.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты работы вносят существенный вклад в теорию граничного управления процессами в сплошных средах. Они могут быть использованы специалистами по теплофизике и теплоэнергетике при решении конкретных задач управления процессом теплопереноса, а также при подготовке студентов вузов по указанным специальностям.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2006, 2008), на IV Всероссийской научной конференции «Математические модели и краевые задачи» (Самара, 2007), на IX Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением» (Иркутск, 2007), на Международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения» (Новосибирск, 2007), на VI Международной научно-технической конференции «Динамика систем, механизмов и машин» (Омск, 2007), на Российской конференции «Математика в современном мире» (Новосибирск, 2007), на Международной конференции «Дифференциальные уравнения и топология» (Москва, 2008).

Публикации автора. Результаты диссертации опубликованы в 15 работах, список основных работ приведен в конце автореферата. Из совместных работ [1, 2, 4, 5, 11] в диссертацию вошли только результаты, полученные лично диссертантом.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 80 наименований, включая работы автора. В каждой главе и во введении использована своя нумерация параграфов, лемм, теорем и формул. Общий объем диссертации составляет 100 страниц машинописного текста.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, приводится обзор литературы и краткая аннотация результатов работы.

1. Глава 1 носит подготовительный характер. В §1.1 кратко излагаются используемые в работе сведения по теории гиперболических уравнений. В §1.2 сформулирована гиперболическая модель теплопроводности. В рамках этой модели процесс распространения тепла в однородном материале описывается системой уравнений

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} q = 0, \qquad \varepsilon\frac{\partial q}{\partial t} + \kappa\,\operatorname{grad} T + q = 0. \tag{1}$$

Здесь первое уравнение – закон сохранения энергии, второе – обобщенный закон Фурье, T, q – температура и вектор теплового потока, постоянные ρ, c, κ – плотность, удельные теплоемкость и теплопроводность, ε – малый положительный параметр, имеющий смысл периода релаксации.

В рамках модели тепловой импульс распространяется со скоростью $a=\sqrt{\kappa/(\varepsilon c\rho)}$. В §1.3 вычислены матрицы Римана одномерной гиперболической системы уравнений теплопроводности и матрицы Римана вспомогательных одномерных гиперболических систем, возникающих при построении решений задачи Коши для двумерной и трехмерной гиперболической системы уравнений теплопроводности.

2. В главах 2, 3 – основных – рассматривается задача граничного управления процессом распространения тепла в однородном материале в рамках модели (1). При произвольно фиксированных начальных значениях температуры $T_0(x)$ и потока $q_0(x)$ из некоторого класса ищется температурный режим $\mu(x,t)=T\big|_{x\in\Gamma}$ на границе Γ тела, обеспечивающий в заданный момент времени $t_*>0$ заданную температуру $T_*(x)$ тела. К выбору момента t_* предъявляется *требование*: за это время выходящий из каждой точки $x\in\Gamma$ тепловой импульс должен успеть достигнуть любой точки тела. В каждом рассматриваемом случае (стержень, пластинка звездной формы, пространственное тело звездной формы) строится класс решений $\mu(x,t)$ задачи управления, зависящий от функционального параметра.

Подход к решению этой задачи во всех случаях состоит в приведении задачи граничного управления к вспомогательной задаче начального управления с использованием результатов главы 1.

2.1. Поясним подход к решению задачи граничного управления

$$(T_0,q_0)\xrightarrow{\mu}T_* \tag{2}$$

для модельного случая, когда тело – круглая пластинка.

1^0. Начальная вектор-функция $h=(T_0,q_0)$ продолжается с большой степенью произвола из круга D, занимаемого пластинкой, в круг $\mathsf{D}'\supset\mathsf{D}$, выбранный так, что боковая поверхность усеченного конуса Y в (x,t)-пространстве с нижним основанием D' в плоскости $t=0$ и верхним основанием в плоскости $t=t_*$ является характеристической поверхностью для системы (1) при $n=2$ (рис.1).

2^0. В усеченном конусе Y рассматривается задача Коши для системы (1) с продолженной начальной вектор-функцией h на нижнем основании D'. Развитые в главе 1 приемы позволяют вычислить решение (T, q) этой задачи.

3^0. Пусть $\widetilde{h}$ – ограничение на кольцо $\mathsf{D}' \setminus \mathsf{D}$ продолженной вектор-функции h, $\widetilde{T} = \widetilde{T}\left(x, t; \widetilde{h}\right)$ – компонента T решения (T, q) задачи Коши, указанной в пункте 2^0. Ставится задача начального управления: подбора $\widetilde{h}$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\widetilde{T}\left(x, t_*; \widetilde{h}\right) = T_*(x), \qquad x \in \mathsf{D}. \tag{3}$$

На практике вычисление $\widetilde{h}$ приводится в ряде случаев к решению уравнения Вольтерра второго рода с хорошим ядром.

4^0. Решению $\widetilde{h}_0$ задачи начального управления (3) отвечает решение задачи граничного управления (2), вычисляемое по формуле

$$\mu(x, t) = \widetilde{T}\left(x, t; \widetilde{h}_0\right)\Big|_{x \in \Gamma}. \tag{4}$$

Аналогичная схема (в усложненном варианте) применяется в случае пластинки звездной формы, а также в одномерном и трехмерном случаях.

2.2. Изложенная в пункте 2.1 процедура решения задачи граничного управления (2) дает подход к описанию класса «допустимых» пар (T_*, q_*), при которых разрешима задача управления $(T_0, q_0) \xrightarrow{\mu} (T_*, q_*)$ с полным фазовым вектором на выходе: при заданной T_* соответствующий вектор q_* вычисляется по формуле

$$q_* = q\left(x, t_*; \widetilde{h}_0\right) = e^{-t_*/\varepsilon} q_0(x) - \frac{\kappa}{\varepsilon} \int_0^{t_*} e^{-(t_* - t)/\varepsilon} \operatorname{grad} \widetilde{T}\left(x, t; \widetilde{h}_0\right) dt.$$

В диссертации рассматривается задача управления (2). В пунктах 3-5 приводится краткая аннотация результатов глав 2, 3; для упрощения записей начальные данные (T_0, q_0) приняты нулевыми.

3. В случае одномерного материала система (1) принимает вид

$$L(u)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+A\frac{\partial}{\partial x}+B\right)u=0, \tag{5}$$

$$u(x,t)=\begin{pmatrix} T \\ q \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} 0 & (c\rho)^{-1} \\ \kappa\varepsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\varepsilon^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно получить

$$A=Z\,\mathrm{diag}(a,-a)Z^{-1}, \qquad Z=\begin{pmatrix} \beta & \beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad a=\sqrt{\frac{\kappa}{\varepsilon c\rho}}, \qquad \beta=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\kappa c\rho}}.$$

Лемма 1.1. Матрицы Римана первого и второго рода гиперболического оператора (5) даются формулами

$$U_k(t)=e^{-t/(2\varepsilon)}ZP_kZ^{-1}, \qquad k=1,2,$$

$$V(x,t)=(\mathrm{v}_{ij})=\frac{e^{-t/(2\varepsilon)}}{4a\varepsilon}Z\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}I_1\left(\frac{r}{2\varepsilon}\right) & I_0\left(\frac{r}{2\varepsilon}\right) \\ I_0\left(\frac{r}{2\varepsilon}\right) & \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}I_1\left(\frac{r}{2\varepsilon}\right) \end{pmatrix}Z^{-1}, \tag{6}$$

где $r_{1,2}=t\mp x/a$, $r=\sqrt{r_1 r_2}\in\mathrm{R}$, $I_k(x)$ – функции Бесселя мнимого аргумента, $P_k=\mathrm{diag}(\delta_{1k},\delta_{2k})$, δ_{ij} – символ Кронекера.

3.1. Представим оператор L в виде

$$L=ZDZ^{-1}+B, \qquad D=\mathrm{diag}(D_1,D_2), \tag{5'}$$

где D_k – оператор дифференцирования по t вдоль характеристики с номером k. Будем говорить, что функция $u(x,t)$ со значениями в R^2 принадлежит классу S_L, если: 1) $u\in C(\mathrm{R}^2)$; 2) для каждой компоненты v_k вектора $v=Z^{-1}u$ существует производная $D_k v_k\in C(\mathrm{R}^2)$.

Далее в пунктах 3.2, 3.3 под решением (обобщенным) системы (5) понимается функция $u(x,t)$ класса S_L , удовлетворяющая равенству $L(u)=0$, где оператор L понимается в смысле $(5')$.

3.2. Полубесконечный стержень. Процесс распространения тепла моделируется краевой задачей в четвертьплоскости $(0,\infty)\times(0,\infty)$:

$$L(u)=0, \qquad u(x,0)=(0,0)^{\mathrm{T}}, \qquad T(0,t)=\mu(t). \tag{7}$$

Здесь $\mu\in C\,[0,\infty)$, выполняется условие согласования нулевого порядка $\mu(0)=0$. Задача (7) однозначно разрешима в классе S_L.

Тепловая волна распространяется со скоростью a, поэтому влияние управления $\mu(t)$ за время t_* сказывается на участке $[0,at_*)$ стержня. Зафиксируем функцию $T_*(x)\in C[0,at_*]$, $T_*(at_*)=0$. Поставим задачу отыскания управления $\mu(t)$, обеспечивающего выполнение равенства

$$T(x,t_*)=T_*(x), \qquad x\in[0,at_*]. \tag{8}$$

Построим на отрезке $[-at_*,0]$ непрерывную вектор-функцию

$$\widetilde{h}(x)=(\lambda,\mathrm{g})^{\mathrm{T}}, \qquad \widetilde{h}(0)=(0,0)^{\mathrm{T}}.$$

Рассмотрим в «усеченном конусе» Y (рис. 2) задачу Коши для оператора (5)

Рис. 2

$$L(u)=0, \qquad u\big|_{t=0}=\begin{cases}\widetilde{h}(x), & x\in[-at_*,0),\\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, & x\in[0,2at_*].\end{cases}$$

Решение $(\widetilde{T},\widetilde{q})$ этой задачи вычисляется по формуле из §1.1 с учетом формул (6) для матриц Римана оператора (5). Последующее применение процедуры, указанной в пункте 2.1, дает следующий результат.

Теорема 2.1. Каждой функции $\mathrm{g}\in C[-at_*,0]$, $\mathrm{g}(0)=0$ отвечает решение $\mu(t)$ задачи управления (7), (8), вычисляемое по формуле

$$\mu(t)=\frac{e^{-t/(2\varepsilon)}}{2}\left(\lambda(-at)+\beta \mathrm{g}(-at)\right)+\int_{-at}^{0}\left(\mathrm{v}_{11}(-\sigma,t)\lambda(\sigma)+\mathrm{v}_{12}(-\sigma,t)\mathrm{g}(\sigma)\right)d\sigma,$$

где $\lambda(x)$ – решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$\frac{e^{-t_*/(2\varepsilon)}}{2}\lambda(x)+\int_{x}^{0}\mathrm{v}_{11}(x-\sigma+at_*,t_*)\lambda(\sigma)d\sigma=f(x), \qquad x\in[-at_*,0],$$

$$f(x)=T_*(x+at_*)-\frac{e^{-t_*/(2\varepsilon)}\beta}{2}\mathrm{g}(x)-\int_{x}^{0}\mathrm{v}_{12}(x-\sigma+at_*,t_*)\mathrm{g}(\sigma)d\sigma,$$

v_{ij} – элементы матрицы (6).

3.3. Стержень конечной длины. В этом случае процесс теплопереноса описывается краевой задачей в полуполосе $(-l,l)\times(0,\infty)$:

$$L(u)=0, \quad u(x,0)=(0,0)^{\mathrm{T}}, \quad T(-l,t)=\mu^-(t), \quad T(l,t)=\mu^+(t). \tag{9}$$

Здесь μ^-, $\mu^+\in C[0,\infty)$, выполняются условия согласования нулевого порядка $\mu^-(0)=\mu^+(0)=0$. Задача (9) однозначно разрешима в классе S_L.

Задача управления состоит в вычислении пары (μ^-,μ^+) (двустороннее управление) либо одной из функций μ^-, μ^+ при фиксированной второй (одностороннее управление), обеспечивающих во всех точках стержня выполнение равенства (8) при заданных t_*, $T_*(x)\in C[-l,l]$. Предполагается $t_*\geq 2l/a$, в этом случае идущие от концов стержня управляющие тепловые импульсы успевают пройти стержень хотя бы один раз. Ниже приводится результат для случая когда управление *двустороннее* и $t_*=2l/a$. В этой ситуации усеченный конус Y имеет вид, указанный на рис. 3.

Представим функцию T_* в виде

$$T_*=T_*^-+T_*^+, \qquad T_*^-,T_*^+\in C, \qquad T_*^-(l)=T_*^+(-l)=0. \tag{10}$$

Зададимся функциями $g^- \in C[-l-at_*,-l]$, $g^+ \in C[l,l+at_*]$, $g^-(-l)=g^+(l)=0$.

Поставим в соответствие паре $\left(T_*^-, g^-\right)$ функцию $\lambda^-(x)$ на отрезке $[-l-at_*,-l]$ как решение интегрального уравнения Вольтерра

$$\frac{e^{-t_*/(2\varepsilon)}}{2}\lambda^-(x)+\int_x^{-l} v_{11}(x-\sigma+at_*,t_*)\lambda^-(\sigma)d\sigma = f^-(x), \tag{11}$$

паре $\left(T_*^+, g^+\right)$ функцию $\lambda^+(x)$ на отрезке $[l,l+at_*]$ как решение уравнения

$$\frac{e^{-t_*/(2\varepsilon)}}{2}\lambda^+(x)+\int_l^{x} v_{11}(x-\sigma-at_*,t_*)\lambda^+(\sigma)d\sigma = f^+(x), \tag{12}$$

где

$$f^-(x)=T_*^-(x+at_*)-\frac{e^{-t_*/(2\varepsilon)}\beta}{2}g^-(x)-\int_x^{-l} v_{12}(x-\sigma+at_*,t_*)g^-(\sigma)d\sigma,$$

$$f^+(x)=T_*^+(x-at_*)+\frac{e^{-t_*/(2\varepsilon)}\beta}{2}g^+(x)-\int_l^{x} v_{12}(x-\sigma-at_*,t_*)g^+(\sigma)d\sigma,$$

v_{ij} – элементы матрицы (6).

Теорема 2.4. Каждому разбиению (10) функции T_* и каждой паре функций g^-, g^+, указанных выше, отвечает решение (μ^-,μ^+) поставленной задачи управления, вычисляемое по формулам

$$\mu^-(t)=\frac{e^{-t/(2\varepsilon)}}{2}\left(\lambda^-(-l-at)+\beta g^-(-l-at)+\int_{-l-at}^{-l}\left(v_{11}\lambda^-(\sigma)+v_{12}g^-(\sigma)\right)d\sigma,\right.$$

$$\mu^+(t)=\frac{e^{-t/(2\varepsilon)}}{2}\left(\lambda^+(l+at)-\beta g^+(l+at)\right)+\int_l^{l+at}\left(\tilde{v}_{11}\lambda^+(\sigma)+\tilde{v}_{12}g^+(\sigma)\right)d\sigma,$$

где λ^-, λ^+ – решения интегральных уравнений (11), (12), $v_{ij}=v_{ij}(-l-\sigma,t)$, $\tilde{v}_{ij}=v_{ij}(l-\sigma,t)$.

4. Процесс распространения тепла в пластинке моделируется краевой задачей в цилиндре $D\times(0,\infty)$:

$$L(u)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{2}A_k\frac{\partial}{\partial x_k}+B\right)u=0,\quad u(x,0)=(0,0,0)^{\mathsf{T}},\quad T(x,t)\big|_{x\in\Gamma}=\mu(x,t). \qquad (13)$$

Здесь D – звездная относительно точки $x=(0,0)$ ограниченная область в R^2 с границей Γ, $u(x,t)=(T,q)^{\mathsf{T}}$, $q=(q_1,q_2)^{\mathsf{T}}$, $x=(x_1,x_2)$,

$$A_1=\begin{pmatrix}0 & (c\rho)^{-1} & 0\\ \kappa\varepsilon^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & (c\rho)^{-1}\\ 0 & 0 & 0\\ \kappa\varepsilon^{-1} & 0 & 0\end{pmatrix},\quad B=\varepsilon^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Предполагается $\Gamma\in C^{\infty}$, $\mu\in\dot{C}^{\infty}(\Gamma\times[0,\infty))$ (символ $\dot{C}^{\infty}$ обозначает множество бесконечно гладких функций с носителем, отделенным от границы области). В этой ситуации выполняются условия согласования всех порядков, и задача (13) однозначно разрешима в классе C^{∞}.

Задача управления состоит в отыскании функции $\mu(x,t)$, обеспечивающей при заданных t_*, $T_*(x)\in\dot{C}^{\infty}(\overline{\mathsf{D}})$ выполнение равенства

$$T(x,t_*)=T_*(x),\qquad x\in\overline{\mathsf{D}}. \qquad (15)$$

Предполагается $t_*\ge 2r_0/a$, где r_0 – радиус минимального круга с центром в точке $(0,0)$, содержащем область $\overline{\mathsf{D}}$. За это время выходящий из каждой точки $x\in\Gamma$ тепловой импульс успевает достигнуть любой точки пластинки. Ниже приводится результат для случая $t_*=2l/a$. В этой ситуации характеристический усечен-ный конус Y в полупространстве $\mathrm{R}^2\times[0,\infty)$ имеет своим верхним основанием круг $\mathsf{K}_0=\{x:\ |x|\le r_0\}$ в плоскости $t=t_*$ и ниж-ним основанием – круг $\mathsf{K}_1=\{x:\ |x|\le r_0+at_*\}$ в плоскости $t=0$ (рис. 4). Требование Γ, $T_*\in C^{\infty}$ принято для простоты изложения; для того, чтобы выполняемые ниже построения были корректными, достаточно принять $\Gamma\in C^{n}$, $T_*\in\overset{\circ}{H}{}^{n}(\mathsf{D})$ при достаточно большом n.

4.1. Рассмотрим семейство ортов

$$\Omega = \left\{\omega = (\omega_1, \omega_2)^{\mathsf{T}} = (\cos\varphi, \sin\varphi)^{\mathsf{T}}, \quad \varphi \in [0, \pi]\right\}.$$

Поставим в соответствие двумерному гиперболическому оператору (13) семейство одномерных гиперболических операторов

$$L_\omega = \frac{\partial}{\partial t} + \mathsf{A}\,(\omega)\frac{\partial}{\partial s} + B, \qquad \omega \in \Omega, \tag{16}$$

$$\mathsf{A}\,(\omega) = \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 = Z_\omega\, \mathrm{diag}(a, 0, -a)\, Z_\omega^{-1}, \qquad Z_\omega = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \beta \\ \omega_1 & \omega_2 & -\omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & -\omega_2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы Римана операторов L_ω будем называть матрицами Римана двумерной гиперболической системы (13).

Лемма 1.2. Матрицы Римана двумерной гиперболической системы уравнений теплопроводности (13) даются формулами

$$U_{k\omega}(t) = \left((U_{k\omega})_{ij}\right) = e^{-t/(2\varepsilon)} Z_\omega P_k Z_\omega^{-1}, \quad (k = 1, 3), \qquad U_{2\omega}(t) = e^{-t/\varepsilon} Z_\omega P_2 Z_\omega^{-1}, \tag{17}$$

$$V_\omega(s,t) = \left((V_\omega)_{ij}\right) = \frac{e^{-t/(2\varepsilon)}}{4a\varepsilon} Z_\omega \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\mathsf{r}_2}{\mathsf{r}_1}} I_1\left(\frac{\mathsf{r}}{2\varepsilon}\right) & 0 & I_0\left(\frac{\mathsf{r}}{2\varepsilon}\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ I_0\left(\frac{\mathsf{r}}{2\varepsilon}\right) & 0 & \sqrt{\frac{\mathsf{r}_1}{\mathsf{r}_2}} I_1\left(\frac{\mathsf{r}}{2\varepsilon}\right) \end{pmatrix} Z_\omega^{-1}, \tag{18}$$

где $\mathsf{r}_{1,2} = t \mp s/a$, $\mathsf{r} = \sqrt{\mathsf{r}_1 \mathsf{r}_2} \in \mathrm{R}$, $P_k = \mathrm{diag}(\delta_{1k}, \delta_{2k}, \delta_{3k})$.

4.2. Рассмотрим в усеченном конусе Y задачу Коши

$$L(u) = 0, \qquad u\big|_{t=0} = h(x) \in C^\infty(\mathsf{K}_1), \tag{19}$$

где L – оператор (13). Задача (19) однозначно разрешима в классе $C^\infty(Y)$.

Теорема 3.1. Пусть начальная функция представлена в виде суперпозиции плоских волн:

$$h(x) = \int_0^\pi h_\omega(\omega \cdot x)\, d\varphi, \qquad h_\omega(s) \in C^\infty(\Omega \times [-r_0 - at_*, r_0 + at_*]), \tag{20}$$

где $\omega \cdot x = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2$. Тогда решение задачи Коши (19) дается формулой

$$u(x,t) = \int_0^{\pi} u_\omega(\omega \cdot x, t)\, d\varphi,$$

где $u_\omega(s,t)$ – решение задачи Коши $L_\omega(u_\omega) = 0$, $u_\omega\big|_{t=0} = h_\omega(s)$:

$$u_\omega(s,t) = \sum_{k=1}^{3} U_{k\omega}(t) h_\omega(s - a_k t) + \int_{s-a_1 t}^{s-a_3 t} V_\omega(s-\sigma, t) h_\omega(\sigma)\, d\sigma,$$

$(a_1, a_2, a_3) = (a, 0, -a)$, $U_{k\omega}, V_\omega$ – матрицы (17), (18).

4.3. Подход к решению задачи управления (15) состоит в построении функций $h_\omega(s)$ таких, что решение задачи Коши (19) с начальной функцией (20) удовлетворяет требованию (15), и последующем применении формулы вида (4).

Представляя функцию T_*, *продолженную нулем* из $\overline{\mathrm{D}}$ в R^2, интегралом Фурье и переходя к полярным координатам, получим:

$$T_*(x) = \int_0^{\pi} T_{*\omega}(\omega \cdot x)\, d\varphi, \qquad |x| \le r_0,$$

$$T_{*\omega}(s) = (2\pi)^{-2} \int_0^{\infty} \left(e^{irs} \hat{T}_*(r\omega) + e^{-irs} \hat{T}_*(-r\omega) \right) r\, dr, \quad s \in [-r_0, r_0], \tag{21}$$

где $\hat{T}_*$ – преобразование Фурье функции T_*. Представим функцию $T_{*\omega}(s)$ в виде

$$T_{*\omega} = T_{*\omega}^{-} + T_{*\omega}^{+}, \tag{22}$$

где $T_{*\omega}^{-}, T_{*\omega}^{+} \in C^\infty(\Omega \times [-r_0, r_0])$ и *равны нулю на малых отрезках* вблизи точек соответственно $r_0, -r_0$. Зададим в кольце $\mathrm{K}_1 \setminus \mathrm{K}_0$ вектор-функцию

$$\mathrm{g}(x) = (\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2)^{\mathsf{T}} \in C^\infty, \quad \mathrm{g} = 0 \text{ при достаточно малом } |x| - r_0 > 0. \tag{23}$$

Зафиксируем $\omega \in \Omega$. Обозначим $\mathrm{g}_\omega^{-}, \mathrm{g}_\omega^{+}$ – ограничения $\mathrm{g}(x)$ на интервалы соответственно

$$\{x = s\omega,\ -r_0 - at_* \le s < -r_0\}, \qquad \{x = s\omega,\ r_0 < s \le r_0 + at_*\}. \tag{24}$$

Поставим в соответствие парам $\left(T_{*\omega}^{-}, \mathrm{g}_{\omega}^{-}\right)$, $\left(T_{*\omega}^{+}, \mathrm{g}_{\omega}^{+}\right)$ функции $\lambda_{\omega}^{-}(s)$, $\lambda_{\omega}^{+}(s)$ как решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{-t_*/(2\varepsilon)}}{2}\lambda_{\omega}^{-}(s)+\int\limits_{s}^{-r_0}(V_{\omega})_{11}(s-\sigma+at_*,t_*)\lambda_{\omega}^{-}(\sigma)d\sigma=f_{\omega}^{-}(s), \qquad s\in[-r_0-at_*,-r_0],\\
&\frac{e^{-t_*/(2\varepsilon)}}{2}\lambda_{\omega}^{+}(s)+\int\limits_{r_0}^{s}(V_{\omega})_{11}(s-\sigma-at_*,t_*)\lambda_{\omega}^{+}(\sigma)d\sigma=f_{\omega}^{+}(s), \qquad s\in[r_0,r_0+at_*],
\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$f_{\omega}^{-}(s)=T_{*\omega}^{-}(s+at_*)-\sum_{j=1}^{2}\left[(U_{1\omega})_{1\,j+1}(t_*)\mathrm{g}_{j\omega}^{-}(s)+\int\limits_{s}^{-r_0}(V_{\omega})_{1\,j+1}(s-\sigma+at_*,t_*)\mathrm{g}_{j\omega}^{-}(\sigma)d\sigma\right],$$

$$f_{\omega}^{+}(s)=T_{*\omega}^{+}(s-at_*)-\sum_{j=1}^{2}\left[(U_{3\omega})_{1\,j+1}(t_*)\mathrm{g}_{j\omega}^{+}(s)+\int\limits_{r_0}^{s}(V_{\omega})_{1\,j+1}(s-\sigma-at_*,t_*)\mathrm{g}_{j\omega}^{+}(\sigma)d\sigma\right],$$

$(U_{k\omega})_{ij}, (V_{\omega})_{ij}$ – элементы матриц (17), (18). Обозначим

$$h_{\omega}(s)=\begin{cases}\left(\lambda_{\omega}^{-}, \mathrm{g}_{\omega}^{-}\right)^{\mathsf{T}}, & -r_0-at_*\le s<-r_0,\\ (0,0)^{\mathsf{T}}, & -r_0\le s\le r_0,\\ \left(\lambda_{\omega}^{+}, \mathrm{g}_{\omega}^{+}\right)^{\mathsf{T}}, & r_0<s\le r_0+at_*,\end{cases} \qquad \omega\in\Omega. \tag{26}$$

Теорема 3.3. Каждому разбиению (22) функции $T_{*\omega}$ и каждой вектор-функции (23) отвечает решение $\mu(x,t)$ поставленной задачи управления, вычисляемое по формуле (4), где $\widetilde{T}$ – первая компонента решения задачи Коши (19) с начальной функцией (20), (26).

Процедура вычисления $\widetilde{T}$ описана в §3.2.

5. Процесс распространения тепла в пространственном теле описывается краевой задачей в цилиндре $\mathsf{D}\times(0,\infty)$:

$$L(u)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}A_k\frac{\partial}{\partial x_k}+B\right)u=0, \quad u(x,0)=(0,0,0,0)^{\mathsf{T}}, \quad T(x,t)\big|_{x\in\Gamma}=\mu(x,t). \tag{27}$$

Здесь D – звездная относительно точки $x=(0,0,0)$ ограниченная область в R^3 с границей Γ, $u(x,t)=(T,q)^{\mathsf{T}}$, $q=(q_1,q_2,q_3)^{\mathsf{T}}$, матрицы A_k, B строятся по $(\rho,c,\kappa,\varepsilon)$ аналогично (14). Предполагается $\Gamma\in C^{\infty}$, $\mu\in\dot{C}^{\infty}$.

Задача управления состоит в отыскании функции $\mu(x,t)$, обеспечивающей выполнение равенства (15) при заданных t_*, $T_*(x)\in\dot{C}^{\infty}(\overline{\mathsf{D}})$. Предполагается $t_*\ge 2r_0/a$, $r_0=\max\limits_{\Gamma}|x|$. Ниже приводится результат для случая $t_*=2l/a$.

5.1. Введем семейство ортов

$$\Omega=\left\{\omega=(\cos\varphi\ \sin\theta,\sin\varphi\ \sin\theta,\cos\theta)^{\mathsf{T}},\quad \varphi\in[0,\pi],\quad \theta\in[0,\pi]\right\}.$$

Поставим в соответствие оператору (27) семейство операторов (16), где

$$\mathsf{A}\ (\omega)=\sum_{k=1}^{3}\omega_k A_k=Z_\omega\operatorname{diag}(a,0,0,-a)Z_\omega^{-1},$$

Матрица Z_ω вычисляется аналогично двумерному случаю.

Матрицы Римана операторов L_ω будем называть матрицами Римана трехмерной гиперболической системы (27).

Лемма 1.3. Матрицы Римана трехмерной гиперболической системы уравнений теплопроводности (27) даются формулами

$$U_{k\omega}(t)=\left((U_{k\omega})_{ij}\right)=\begin{cases}e^{-t/(2\varepsilon)}Z_\omega P_k Z_\omega^{-1}, & (k=1,4),\\ e^{-t/\varepsilon}Z_\omega P_k Z_\omega^{-1}, & (k=2,3),\end{cases}\tag{28}$$

$$V_\omega(s,t)=\left((V_\omega)_{ij}\right)=\frac{e^{-t/(2\varepsilon)}}{4a\varepsilon}Z_\omega\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{\mathsf{r}_2}{\mathsf{r}_1}}I_1\left(\frac{\mathsf{r}}{2\varepsilon}\right) & 0 & 0 & I_0\left(\frac{\mathsf{r}}{2\varepsilon}\right)\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ I_0\left(\frac{\mathsf{r}}{2\varepsilon}\right) & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\mathsf{r}_1}{\mathsf{r}_2}}I_1\left(\frac{\mathsf{r}}{2\varepsilon}\right)\end{pmatrix}Z_\omega^{-1},\tag{29}$$

где $P_k=\operatorname{diag}(\delta_{1k},\delta_{2k},\delta_{3k},\delta_{4k})$.

Рассмотрим в усеченном конусе Y задачу Коши (19), где L – оператор (27).

Теорема 3.2. Пусть начальная функция представлена в виде суперпозиции плоских волн:

$$h(x)=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} h_\omega(\omega\cdot x)\sin\theta\, d\varphi\, d\theta,\qquad h_\omega(s)\in C^\infty\left(\Omega\times\left[-r_0-at_*, r_0+at_*\right]\right). \tag{30}$$

Тогда решение задачи Коши (19), (27) дается формулой

$$u(x,t)=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} u_\omega(\omega\cdot x,t)\sin\theta\, d\varphi\, d\theta,$$

где $u_\omega(s,t)$ – решение задачи Коши $L_\omega(u_\omega)=0,\quad u_\omega\big|_{t=0}=h_\omega(s)$:

$$u_\omega(s,t)=\sum_{k=1}^{4} U_{k\omega}(t)h_\omega(s-a_k t)+\int_{s-a_1 t}^{s-a_4 t} V_\omega(s-\sigma,t)h_\omega(\sigma)\,d\sigma,$$

$(a_1,a_2,a_3,a_4)=(a,0,0,-a)$, $U_{k\omega}, V_\omega$ – матрицы (28), (29).

5.2. Решение задачи управления проводится по такой же схеме, как в пункте 4.3. Разложение функции T_* в суперпозицию плоских волн имеет вид

$$T_*(x)=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} T_{*\omega}(\omega\cdot x)\sin\theta\, d\varphi\, d\theta,\qquad |x|\le r_0,$$

где $T_{*\omega}$ дается формулой (21) с заменой $r\,dr$ на $r^2 dr$ и множителя $(2\pi)^{-2}$ на $(2\pi)^{-3}$. Представим функцию $T_{*\omega}$ в виде суммы (22). Зададим в сферическом кольце $\mathsf{K}_1\setminus\mathsf{K}_0$ вектор-функцию

$$\mathsf{g}(x)=(\mathsf{g}_1,\mathsf{g}_2,\mathsf{g}_3)^{\mathsf{T}}\in C^\infty,\quad \mathsf{g}=0 \text{ при достаточно малом } |x|-r_0>0 \tag{31}$$

и пусть $\mathsf{g}_\omega^-, \mathsf{g}_\omega^+$ – ограничения $\mathsf{g}(x)$ на интервалы (24) при фиксированном ω. Поставим в соответствие парам $\left(T_{*\omega}^-, \mathsf{g}_\omega^-\right)$, $\left(T_{*\omega}^+, \mathsf{g}_\omega^+\right)$ функции $\lambda_\omega^-(s)$, $\lambda_\omega^+(s)$ как решения интегральных уравнений (25), где

$$f_{\omega}^{-}(s)=T_{*\omega}^{-}(s+at_{*})-\sum_{j=1}^{3}\left[(U_{1\omega})_{1\,j+1}(t_{*})g_{j\omega}^{-}(s)+\int_{s}^{-r_0}(V_{\omega})_{1\,j+1}(s-\sigma+at_{*},t_{*})g_{j\omega}^{-}(\sigma)d\sigma\right],$$

$$f_{\omega}^{+}(s)=T_{*\omega}^{+}(s-at_{*})-\sum_{j=1}^{3}\left[(U_{4\omega})_{1\,j+1}(t_{*})g_{j\omega}^{+}(s)+\int_{r_0}^{s}(V_{\omega})_{1\,j+1}(s-\sigma-at_{*},t_{*})g_{j\omega}^{+}(\sigma)d\sigma\right], \qquad (32)$$

$(U_{k\omega})_{ij},(V_{\omega})_{ij}$ – элементы матриц (28), (29).

Теорема 3.5. Каждому разбиению (22) функции $T_{*\omega}$ и каждой вектор-функции (31) отвечает решение $\mu(x,t)$ поставленной задачи управления, вычисляемое по формуле (4), где $\widetilde{T}$ – первая компонента решения задачи Коши (19), (27) с начальной функцией (30), (26), где λ_{ω}^{-}, λ_{ω}^{+}– решения интегральных уравнений (25), (32).

В заключении автор выражает глубокую благодарность научному руководителю Р.К. Романовскому за постановку задач, внимание, советы и замечания на протяжении всей работы.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Жукова, О.Г. Граничное управление процессом теплопереноса в одномерном материале. Гиперболическая модель / О.Г. Жукова, Р.К. Романовский // Дифференц. уравнения. – 2007.– Т. 43, № 5.– С. 650-654.

[2] Жукова, О.Г. Двустороннее граничное управление процессом теплопереноса в одномерном материале. Гиперболическая модель / О.Г. Жукова, Р.К. Романовский // Сиб. журн. индустр. математики – 2007.– Т 10, № 4(32).– С. 32-40.

[3] Жукова, О.Г. Граничное управление гиперболической системой уравнений теплопроводности / О.Г. Жукова // Дифференц. уравнения.– 2008.– Т. 44, № 1.– С. 82-88.

[4] Романовский, Р.К. Граничное управление процессом теплопереноса в двумерном материале. Гиперболическая модель / Р.К. Романовский, О.Г.

Жукова // Сиб. журн. индустр. математики – 2008.– Т 11, № 3(35).– С. 119-125.

[5] Романовский, Р.К. Гиперболическая модель задачи граничного управления процессом теплопереноса в одномерном твердом материале / Р.К. Романовский, О.Г. Жукова // Доклады АН ВШ РФ.– 2006.– № 1(6). – С. 69-77.

[6] Жукова, О.Г. Граничное управление трехмерной гиперболической системой уравнений теплопроводности / О.Г. Жукова // Омский гос. техн. ун-т.– Омск, 2007.– 10с.: ил.–1.– Деп. в ВИНИТИ 04.12.2007, № 1126 – В 2007.

[7] Жукова, О.Г. Гиперболическая модель задачи граничного управления процессом теплопереноса в одномерном материале / О.Г. Жукова // Тез. докл. Междунар. конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 10–15 июля 2006).– Владимир, 2006.– С.102-103.

[8] Жукова, О.Г. Граничное управление процессом теплопереноса / О.Г. Жукова // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением: труды IX Междунар. Четаевской конференции (Иркутск, 12 – 16 июня 2007). – Иркутск, 2007. – Т. 3. – С. 86-91.

[9] Жукова, О.Г. Граничное управление процессом распространения тепла в полубесконечном стержне. Гиперболическая модель / О.Г. Жукова // Математика в современном мире: тез. докл. Российской конференции (Новосибирск, 17 – 23 сентября 2007). – Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2007. – С. 162-163.

[10] Жукова, О.Г. Граничное управление трехмерной гиперболической системой уравнений теплопроводности / О.Г. Жукова // Тез. докл. Междунар. конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 26 июня –2 июля 2008). – Владимир, 2008.– С. 106-108.

[11] Романовский, Р.К. Граничное управление двумерной гиперболической системой уравнений теплопроводности / Р.К. Романовский, О.Г. Жукова // Дифференциальные уравнения и топология.: тез. докл. Междунар. конференции (Москва, 17 – 22 июня 2008).– Москва, 2008. – С. 179-180